ÜBER EIN PROBLEM VON LAGUERRE.

Briefwechsel zwischen **M. Fekete** und **G. Pólya** (Budapest).

Estratto dal tomo XXXIV (2° sem. 1912) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*
Adunanza del 12 maggio 1912.

I.

. . . .

Um die Vermutung zu beweisen, dass das Polynom [1])

$$g(x) = \left(\frac{1}{q}\right) + \left(\frac{2}{q}\right)x + \cdots + \left(\frac{i}{q}\right)x^{i-1} + \cdots + \left(\frac{q-1}{q}\right)x^{q-2}$$

im Innern des Intervalls (0, 1) beständig positiv ist, bildete ich die Quotienten

$$\frac{g(x)}{1-x}, \quad \frac{g(x)}{(1-x)^2}, \quad \cdots$$

und wollte zeigen, dass für ein genügend grosses k die MACLAURIN'sche Entwicklung von $\dfrac{g(x)}{(1-x)^k}$ lauter positive Koeffizienten hat. Dies gelang mir jedoch nur für spezielle Zahlenwerte von q. So wurde ich auf die Frage geführt: Der Umstand, dass in der MACLAURIN'schen Reihe von $\dfrac{f(x)}{(1-x)^k}$ (für genügend grosse Werte von k) keine Zeichenwechsel vorkommen, ist eine *hinreichende* Bedingung dafür, dass das Polynom $f(x)$ mit reellen Koeffizienten zwischen 0 und 1 nicht verschwinde; ist diese Bedingung auch *notwendig?* Ich fand, dass *es dem so ist.*

Nun wollte ich erkennen, in welcher Weise die Anzahl der Zeichenwechsel in diesen MACLAURIN'schen Entwicklungen mit der Anzahl der Wurzeln zwischen 0 und 1 zusammenhängt. So fand ich von neuem die unten zitierten Ergebnisse von LAGUERRE und das von ihm gestellte Problem, dessen Lösung mir teilweise gelang.

. . . .

Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Man bilde aus der Koeffizientenfolge

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_m$$

[1]) q bedeutet eine ungerade Primzahl, $\left(\frac{i}{q}\right)$ das LEGENDRE'sche Symbol.

For comments on this paper[5], see p. 415.

durch wiederholte Summation die Folgen

$$\begin{array}{l}
A_0^{(0)}=a_0,\quad A_1^{(0)}=a_0+a_1,\ \ldots,\ A_m^{(0)}=a_0+a_1+\cdots+a_m,\quad A_{m+1}^{(0)}=a_0+a_1+\cdots+a_m,\ \ldots\\
A_0^{(1)}=A_0^{(0)},\quad A_1^{(1)}=A_0^{(0)}+A_1^{(0)},\quad \ldots,\ A_n^{(1)}=A_0^{(0)}+A_1^{(0)}+\cdots+A_n^{(0)},\ \ldots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_0^{(k)}=A_0^{(k-1)},\quad A_1^{(k)}=A_0^{(k-1)}+A_1^{(k-1)},\ \ldots,\ A_n^{(k)}=A_0^{(k-1)}+A_1^{(k-1)}+\cdots+A_n^{(k-1)},\ \ldots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

wo die $(k+1)$-te Folge aus den Koeffizienten der MACLAURIN'schen Entwicklung von $\dfrac{f(x)}{(1-x)^{k+1}}$ besteht. Die Anzahl der Wurzeln von $f(x)$ zwischen 0 und 1 sei p, die Anzahl der Zeichenwechsel sei in der Koeffizientenfolge des Polynoms gleich w und in der $(k+1)$-ten Folge $v(k)$. LAGUERRE bewies [2]), mit Hilfe einer Verallgemeinerung der DESCARTES'schen Zeichenregel auf Potenzreihen, dass

$$\begin{array}{ll}
1^\circ & w \geq v(0) \geq v(1) \geq \cdots \geq v(k) \geq v(k+1) \geq \cdots\\
2^\circ & v(k) \geq p\\
3^\circ & v(k) \equiv p \qquad (\text{mod. } 2),
\end{array}$$

dass also $\lim\limits_{k=\infty} v(k)$ existiert, nicht kleiner, als p sein kann und kongruent p (mod. 2) ist [3]).

LAGUERRE stellt das Problem, $\lim\limits_{k=\infty} v(k)$ zu bestimmen [4]), lässt es aber *ungelöst*.

. . . .

Meine Untersuchungen ergaben, dass $\lim\limits_{k=\infty} v(k)$ *genau gleich p ist, wenn $f(x)$ nur reelle Wurzeln besizt.* Ohne die Realität aller Wurzeln zu bedingen, konnte ich bisher den allgemeinen Beweis für die Richtigkeit von

$$\lim_{k=\infty} v(k) = p$$

nicht führen, nur für $p=0$ gelang mir dieser Beweis, wenn ich auch komplexe Wurzeln zuliess.

Um meine Resultate zu gewinnen, habe ich die MACLAURIN'schen Entwicklungen

---

[2]) E. LAGUERRE: *a*) *Mémoire sur la théorie des équations numériques* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, III[e] série, t. IX (1883), pp. 99-146]; *b*) *Œuvres de* LAGUERRE (Paris, Gauthier-Villars), t. I (1898), pp. 3-47.

[3]) Denselben Zusammenhang zeigte LAGUERRE zwischen der Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ im Intervall $(1, \infty)$ und der Anzahl der Zeichenwechsel $V(k)$ in der Koeffizientenfolge der Entwicklung von $\dfrac{f(x)}{(1-x)^{k+1}}$ nach fallenden Potenzen von x. Er beweist ihn auch für den fall, wo $f(x)$ eine Potenzreihe ist [loc. cit. [2]), *b*), p. 9]. Nach der Abfassung dieser Zeilen erschien ein neuer Beweis für LAGUERRE's zuletzt erwähnten Satz von A. HURWITZ {*Über den Satz von* BUDAN-FOURIER [Mathematische Annalen, Bd. LXXI (1912), S. 584-591]}.

[4]) LAGUERRE fragt eigentlich nach dem Werte $\lim\limits_{k=\infty} V(k)$; die zwei Probleme sind ersichtlich äquivalent.

von Quotienten der Form

$$\frac{x_0 - x}{(1-x)^r} \quad \text{und} \quad \frac{a + 2bx + cx^2}{(1-x)^r}$$

für $x_0 > 1$ und $b^2 - ac < 0$ zu untersuchen. Zuerst aber definiere ich den Begriff einer r-fach positiven Reihe, wodurch die Formulierung der verwendeten Sätze beträchtlich erleichtert wird.

1. Ich nenne die Potenzreihe mit reellen Koefficienten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

r-fach positiv, wenn sämmtliche Determinanten $(k+1)$-ter Ordnung von der Form

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_0} & \alpha_{i_1} & \dots & \alpha_{i_k} \\ \alpha_{i_0-1} & \alpha_{i_1-1} & \dots & \alpha_{i_k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_0-k} & \alpha_{i_1-k} & \dots & \alpha_{i_k-k} \end{vmatrix} = [i_0, i_1, \dots, i_k] \qquad (\alpha_s = 0, \text{ wenn } s < 0)$$

für $0 \leqq i_0 < i_1 < \cdots < i_k$ und $0 \leqq k \leqq r$ positiv sind [5]). Nun besteht für r-fach positive Potenzreihen folgender

SATZ I. — *Bildet man das Produkt einer r-fach positiven Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ und eines Polynoms r-ten Grades mit reellen Koeffizienten $\gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_r x^r$, $(\gamma_r \neq 0)$, so kann die Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge β_i $(i = 0, 1, 2, \dots)$ der Produktreihe $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i$ die Zahl r nicht überschreiten* [6]).

Beweis: Gesetzt, der Satz sei falsch. Dann könnten aus der Folge

$$\beta_i = \alpha_i \gamma_0 + \alpha_{i-1} \gamma_1 + \cdots + \alpha_{i-r} \gamma_r \qquad (i = 0, 1, 2, \dots)$$
$$(\alpha_s = 0, \quad \text{wenn} \quad s < 0)$$

solche

$$\beta_{i_0}, \quad \beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}, \quad \beta_{i_{r+1}}$$

herausgegriffen werden, deren Indices die Bedingung

$$i_0 < i_1 < \cdots < i_r < i_{r+1}$$

erfüllen und abwächselnd positiv und negativ sind.

---

5) Ein einfaches Beispiel für eine r-fach positive Reihe ist die MACLAURIN'sche Reihe von

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

6) **Ich bewies auch den schärferen Satz:** ***Ist w die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge γ_0, $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ und ist $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ r-fach positiv, so können auch in der Koeffizientenfolge von***

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i \cdot (\gamma_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_r x^r)$$

höchstens nur w Zeichenwechsel auftreten. Mit Hilfe dieses schärferen Satzes bewies ich den von LAGUERRE nicht ganz einwandfrei begründeten Satz, dass, *wenn $f(x)$ ein relles Polynom bezeichnet, in der Koeffizientenfolge von $f(x)e^{zx}$ die Anzahl der Zeichenwechsel mit wachsendem z nur abnehmen kann.*

Fassen wir die $(r+2)$ Identitäten

$$\alpha_{i_0}\gamma_0 + \alpha_{i_0-1}\gamma_1 + \quad + \alpha_{i_0-r}\gamma_r = \beta_{i_0}$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdot$$
$$\alpha_{i_{r+1}}\gamma_0 + \alpha_{i_{r+1}-1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i_{r+1}-r}\gamma_r = \beta_{i_{r+1}}$$

als lineare Gleichungen in den $(r+1)$ Grössen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ auf, so kann γ_r sowohl aus den $(r+1)$ ersten, als auch aus den $(r+1)$ letzten unter ihnen berechnet werden, wobei wir natürlich denselben Wert erhalten müssen.

Im ersten Falle erhalten wir

$$(-1)^r[i_0, i_1, \ldots, i_r]\gamma_r$$
$$= \beta_{i_0}[i_1, i_2, \ldots, i_r] - \beta_{i_1}[i_0, i_2, \ldots, i_r] + \quad + (-1)^r\beta_{i_r}[i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}],$$

im zweiten aber

$$(-1)^r[i_1, i_2, \ldots, i_{r+1}]\gamma_r$$
$$= \beta_{i_1}[i_2, i_3, \ldots, i_{r+1}] - \beta_{i_2}[i_1, i_3, \ldots, i_{r+1}] + \cdots + (-1)^r\beta_{i_{r+1}}[i_1, i_2, \ldots, i_r].$$

Die hier vorkommenden Determinanten sind nach Voraussetzung positiv, die nach einander folgenden β wechseln ihre Vorzeichen, es zeigt sich also, dass $(-1)^r\gamma_r$ im ersten Falle das Vorzeichen von β_{i_0}, im zweiten aber das von β_{i_1} hat. Die Annahme, dass die Zahlenfolge β_i mehr als r Zeichenwechsel aufweist, hätte zur Folge, dass γ_r zugleich positiv und negativ wäre.

Damit ist der Satz I. bewiesen.

2. Um zu entscheiden, ob eine gegebene Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$ r-fach positiv ist, oder nicht, ist unnötig, sämmtliche Determinanten

$$[i_0, i_1, \ldots, i_k] \qquad (0 \leqq i_0 < i_1 < \ldots < i_k,\ 0 \leqq k \leqq r) \tag{1}$$

zu untersuchen. Es besteht nähmlich **der**

SATZ II. — *Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$ ist r-fach positiv, d. h. sämmtliche* ***Determinanten*** (1) *sind positiv, falls nur die Determinanten*

$$[i, i+1, \ldots, i+k] \qquad (i \geqq 0,\ 0 \leqq k \leqq r)$$

unter ihnen positiv sind.

Um den Satz II. zu **beweisen, benütze ich folgendes**

LEMMA. — Sind sämmtliche **Determinanten n-ter Ordnung**

$$\begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & & a_{1,i_n} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & \cdot & a_{2,i_n} \\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n,i_1} & a_{n,i_2} & \cdot\ \cdot & a_{n,i_n} \end{vmatrix} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \quad (1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqq m)$$

und die $(n+1)$-ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_{1,i} & a_{1,i+1} & \cdot & a_{1,i+n} \\ a_{2,i} & a_{2,i+1} & \cdot & a_{2,i+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1,i} & a_{n+1,i+1} & \cdots & a_{n+1,i+n} \end{vmatrix} = \{i, i+1, \ldots, i+n\} \quad (1 \leqq i \leqq m-n)$$

positiv, so sind sämmtliche Determinanten

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1}\}$$
$$(1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_n < i_{n+1} \leqq m)$$

ebenfalls positiv.

Beweis: Zuerst zeige ich, dass aus den Voraussetzungen

$$\underset{(h=2,\,3,\,\ldots,\,n+1)}{\{1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n+1\} > 0,} \qquad \underset{(h=2,\,3,\,\ldots,\,n+1)}{\{2, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n+2\} > 0}$$

und

$$\{1, 2, \ldots, n+1\} > 0, \qquad \{2, 3, \ldots, n+1, n+2\} > 0$$

die Positivität von

$$\{1, 2, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n+2\} \quad (h = 2, 3, \ldots, n+1)$$

folgt. Zu diesem Zwecke löse ich das Gleichungssystem

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n+1}x_{n+1} + a_{1,n+2} = 0.$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \qquad + a_{n+1,n+1}x_{n+1} + a_{n+1,n+2} = 0.$$

Es ergiebt sich

$$x_1 = (-1)^{n-1}\frac{\{2, 3, \ldots, n+1, n+2\}}{\{1, 2, \ldots, n, n+1\}}$$

und

$$x_h = (-1)^{n-h}\frac{\{1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n+2\}}{\{1, 2, \ldots, n, n+1\}} \quad (h=2, 3, \ldots, n+1).$$

Sodann berechne ich x_h von neuem aus demjenigen Gleichungssystem, das aus dem obigen durch Weglassung der letzten Gleichung entsteht; indem ich x_1 als Parameter betrachte, erhalte ich

$$x_h = (-1)^{n-h}\frac{\{1, 2, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n, n+1\}.(-1)^{n-1}x_1 + \{2, 3, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n, n+1, n+2\}}{\{2, 3, \ldots, n, n+1\}}.$$

Soll x_h auch dem ursprünglichem Gleichungssystem genügen, so muss für x_1 der oben berechnete Wert eingesetzt werden; also ist:

$$x_h = (-1)^{n-h} \times$$
$$\times\frac{\{1, 2, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n, n+1\}\{2, 3, \ldots, n+1, n+2\} + \{2, 3, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n+2\}\{1, 2, \ldots, n, n+1\}}{\{2, 3, \ldots, n, n+1\}\{1, 2, \ldots, n, n+1\}}.$$

Vergleichen wir die beiden Werte von x_h, so ergiebt sich [7]):

$$\{1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n+2\}$$
$$= \frac{\{1, 2, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n+1\}\{2, 3, \ldots, n+2\} + \{2, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n+2\}\{1, 2, \ldots, n+1\}}{\{2, 3, \ldots, n, n+1\}}.$$

---

[7]) Diese Determinantenrelation ist wahrscheinlich bekannt, ich konnte sie jedoch in Handbüchern nicht finden.

Die Determinanten rechts sind nach Voraussetzung sämmtlich positiv, also ist es auch die linksstehende, was zu beweisen war.

Dieselbe Schlussweise gestattet aus der Positivität der Determinanten $(n+1)$-ter

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}\}, \quad \{i_2, i_3, \ldots, i_{n+2}\}$$

und der Determinanten n-ter Ordnung

$$\{i_1, \ldots, i_{h-1}, i_{h+1}, \ldots, i_{n+1}\}, \qquad \{i_2, \ldots, i_{h-1}, i_{h+1}, \ldots, i_{n+2}\}$$

die Ungleichungen

$$\{i_1, \ldots, i_{h-1}, i_{h+1}, \ldots, i_{n+2}\} > 0 \qquad (h = 2, 3, \ldots, n+1)$$

zu folgern und auf diesem Wege zu beweisen, dass sämmtliche Determinanten $(n+1)$-ter Ordnung positiv sind, für welche $i_{n+1} - i_1 = k+1$, wenn das von allen Determinanten derselben Ordnung schon bekannt ist, für welche $i_{n+1} - i_1 = k$ ist.

Damit ist unser Lemma bewiesen.

Aus ihm folgt sofort der Satz II. Ich setze

$$a_{i,k} = \alpha_{k-i} \quad (\alpha_{k-i} = 0, \text{ wen } k - i < 0)$$

wobei

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = [i_1 - 1, i_2 - 1, \ldots, i_n - 1]$$

wird. Für $n = 1$ folgt aus unserem Lemma, dass die Ungleichungen

$$[0] > 0, \quad [1] > 0, \quad [2] > 0, \ldots$$

und

$$[0, 1] > 0, \quad [1, 2] > 0, \quad [2, 3] > 0, \ldots$$

die Ungleichungen

$$[i_1, i_2] > 0 \qquad (0 \leq i_1 < i_2);$$

nach sich ziehen; die eben erhaltenen Ungleichungen und

$$[0, 1, 2] > 0, \quad [1, 2, 3] > 0, \quad [2, 3, 4] > 0, \ldots$$

ergeben die weiteren

$$[i_1, i_2, i_3] > 0 \qquad (0 \leq i_1 < i_2 < i_3);$$

u. s. w.

3. Satz III.—*Die Produktreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$ *der r-fach positiven Potenzreihen* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ *ist zu mindest r-fach positiv* [8]).

Zum Beweise muss nach Satz II. gezeigt werden, dass die Ungleichungen

$$\begin{vmatrix} \gamma_i & \gamma_{i+1} & & \gamma_{i+k} \\ \gamma_{i-1} & \gamma_i & \cdot & \cdot \; \gamma_{i+k-1} \\ \cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\ \gamma_{i-k} & \gamma_{i-k+1} & \cdot\;\cdot\;\cdot & \gamma_i \end{vmatrix} > 0 \tag{2}$$

---

[8]) Dass die Produktreihe von r-fach positiven Reihen auch mehr als r fach positiv sein kann, zeigt das Beispiel

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \frac{1}{(1-x)^{2r+2}}.$$

für jedes

$$i \geqq 0, \quad 0 \leqq k \leqq r \quad (\gamma_s = 0, \text{ wenn } s < 0)$$

bestehen. Die Determinante links ist das zeilenweise ausgeführte Produkt der Matrices mit je $(k+1)$ Zeilen und $(i+k+1)$ Spalten

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdot\, \alpha_k & \alpha_{k+i} \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \cdot & \cdot\, \alpha_{k-1} & \alpha_{k+i-1} \\ 0 & 0 & \alpha_0 \cdot & \cdot\, \alpha_{k-2} & \alpha_{k+i-2} \\ \cdot & & \cdot\;\cdot & & \\ 0 & 0 & 0\;\cdot & \alpha_0 & \alpha_i \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} \beta_i & \beta_{i-1} & \beta_{i-2} & \beta_0 & 0 & \cdot & 0 \\ \beta_{i+1} & \beta_i & \beta_{i-1} & \beta_1 & \beta_0 & \cdot & 0 \\ \beta_{i+2} & \beta_{i+1} & \beta_i & \beta_2 & \beta_1 & \cdot & 0 \\ \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot \\ \beta_{i+k} & \beta_{i+k-1} & \beta_{i+k-2} & \beta_k & \beta_{k-1} & \cdot & \beta_0 \end{matrix} \right\|;$$

sie ist also nach einem bekannten Satz gleich der Summe der Produkte, in denen die Determinanten $(k+1)$-ter Ordnung der einen Matrix mit den homologen der anderen verbunden sind. Diese Determinanten sind jedoch positiv, da die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ r-fach positiv sind, daraus folgt aber die zu beweisende Ungleichung (2).

4. Ich schliesse die Reihe der vorausgeschickten Sätze mit

SATZ IV. — *Ist $x_0 > 1$, so ist die* MACLAURIN'*sche Reihe von*

$$\frac{x_0 - x}{(1-x)^{r+1}} \qquad (r \geqq 1)$$

eine r-fach positive Reihe.

Die Richtigkeit unserer Behauptung ist für $r = 1$ evident. Sie sei richtig für $r \leqq R - 1$, es soll gezeigt werden, dass sie auch für $r = R$ richtig ist.

Setzen wir

$$\frac{x_0 - x}{(1-x)^R} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n, \tag{3}$$

$$\frac{x_0 - x}{(1-x)^{R+1}} \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n. \tag{4}$$

Die Positivität der Determinante

$$\begin{vmatrix} v_i & \cdots & v_{i+k} \\ & \cdots & \\ v_{i-k} & \cdots & v_i \end{vmatrix} \qquad (0 \leqq i,\ 0 \leqq k \leqq R;\ v_s = 0, \text{ wenn } s < 0) \tag{5}$$

— was nach Satz II. die R-fache Positivität der Reihe (4) sichert — folgt für $k \leqq R - 1$ ähnlich, wie oben, aus dem Umstande, dass diese Determinante das Produkt der beiden

Matrices

$$\left\|\begin{matrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_k & \ldots & u_{k+i} \\ 0 & u_0 & \ldots & u_{k-1} & \ldots & u_{k+i-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & u_0 & \ldots & u_i \end{matrix}\right\|$$

$$\underbrace{\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix}\right\|}_{(i+k+1)\text{ Spalten}} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\}(k+1)\text{ Zeilen}$$

ist. Die Determinanten $(k+1)$-ter Ordnung $(k \leqq R-1)$ der ersten Matrix sind nähmlich nach der vorausgestzten $(R-1)$-fachen Positivität von (3) sämmtlich positiv.

Die homologen Determinanten der zweiten Matrix aber sind ersichtlich teils positiv, teils verschwindend.

Für $k = R$ ist die Determinante (5) bis auf den Faktor $(-1)^{\frac{1}{2}R(R+1)}$ gleich der HANKEL'schen

$$\begin{vmatrix} v_{i-R} & v_{i-R+1} & \ldots & v_i \\ v_{i-R+1} & v_{i-R+2} & \ldots & v_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_i & v_{i+1} & \ldots & v_{i+R} \end{vmatrix}.$$

Da die v_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ eine arithmetische Reihe R-ter Ordnung mit der konstanten R-ten Differenz $(x_0 - 1)$ bilden, so ist der Wert dieser HANKEL'schen Determinante, wie bekannt, gleich

$$(-1)^{\frac{1}{2}R(R+1)}(x_0 - 1)^{R+1}$$

Der Wert der Determinante (5) ist also für $k = R$ gleich $(x_0 - 1)^R$, d. h. wegen $x_0 - 1 > 0$ selbst positiv.

5. Nach diesen Vorbereitungen können wir unser Problem angreifen. Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \qquad (a_0 \neq 0)$$

ein Polynom, das im reellen Zahlgebiet in lineare Faktoren zerfällt, sonst aber ganz beliebig ist. Ich bezeichne mit p die Anzahl jener Wurzeln von

$$f(x) = 0,$$

welche positiv und kleiner als 1 sind. In der Koeffizientenfolge

$$A_0^{(k)},\ A_1^{(k)},\ A_2^{(k)}, \ldots$$

der Potenzreihe

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)} x^n$$

kann die Anzahl $v(k)$ der Zeichenwechsel nach den erwähnten Ergebnissen von LAGUERRE mit wachsendem k nur abnehmen, kann aber nie unter p sinken; $v(k)$ strebt also gewiss für $k = \infty$ einer Grenze zu, die nicht kleiner als p ist.

Die Ausführungen unter N° 1.-4. ermöglichen nun zu *beweisen dass*

$$\lim_{k=\infty} v(k) = p,$$

welche Aussage mit Rücksicht darauf, dass die $v(k)$ ganze Zahlen sind, auch so formuliert werden kann: es existiert eine positive Zahl K, so dass

$$v(k) = p, \tag{6}$$

wenn $k > K$ ist.

Ich beweise eigentlich mehr, als die *blosse Existenz* von K; ich zeige nähmlich, dass K — bloss vom Grade m des Polynoms abhängend — folgenderweise gewählt werden kann:

$$K = \frac{(m+3)^2}{4}.$$

Die Produkte der Linearfaktoren von $f(x)$, welche 1) zu den negativen Wurzeln, 2) zu den Wurzeln zwischen 0 und 1, 3) zu den Wurzeln grösser als 1 gehören, sollen der Reihe nach mit $\nu(x)$, $\pi(x)$, $\Pi(x)$ bezeichnet werden, und ihre Gradzahlen mit n, p, P [9]). (Die Linearfaktoren sind für negative Wurzel x_0 in der Form $x - x_0$, für positive in der Form $x_0 - x$ zu denken).

Dann ist

$$f(x) = c\,\nu(x)\,\pi(x)\,\Pi(x)(1-x)^s \qquad (c \text{ eine reelle Konstante})$$

und

$$n + p + P + s = m.$$

Die Behauptung (6) ist bewiesen, wenn ich zeige, dass

$$v(P(p+1)+s) = p$$

besteht; daraus folgt nähmlich die Richtigkeit von (6) a fortiori, da ja

$$P(p+1) + s < \frac{(m+3)^2}{4}$$

ist [10]). Für $P = 0$ ist die Anzahl der Zeichenwechsel im Polynom $\frac{f(x)}{(1-x)^s} = c\,\nu(x)\,\pi(x)$ nach der DESCARTES'schen Regel gleich p, also weist die Koeffizientenfolge der MACLAURIN'schen Reihe von $\frac{f(x)}{(1-x)^{s+1}}$ ebenso viele Zeichenwechsel auf, d. h. $v(s) = p$.

Sei nun $P > 0$. Nach den Sätzen III. und IV. ist die MACLAURIN'sche Reihe von $\frac{\Pi(x)}{(1-x)^{P(p+1)}}$, als Produkt von P Faktoren der Form $\frac{x_0 - x}{(1-x)^{p+1}}$, $(x_0 > 1)$, eine zu mindest p-fach positive Reihe. Multiplizieren wir diese Reihe mit dem Polynom

---

9) Ist einer der Zahlen n, p, P gleich 0, so ist der bezügliche Faktor gleich 1 zu setzen.

10) Es ist nähmlich

$$P(p+1) \leqq \frac{(P+p+1)^2}{4} = \frac{(m+1-n-s)^2}{4} \leqq \frac{(m+1)^2}{4}$$

also

$$P(p+1) + s \leqq \frac{(m+1)^2}{4} + m < \frac{(m+3)^2}{4}.$$

$c\pi(x)$, so ensteht eine Reihe, die nach Satz I. höchstens p Zeichenwechsel enthalten kann.

Diese Reihe soll wieder mit $\nu(x)$ multipliziert werden, wodurch wir die Reihe von

$$\frac{c\pi(x)\Pi(x)}{(1-x)^{P(p+1)}}\nu(x) = \frac{f(x)}{(1-x)^{P(p+1)+s}}$$

erhalten. Dabei kann die Anzahl der Zeichenwechsel nur abnehmen, da $\nu(x)$ lauter Linearfaktoren von der Form $x+\alpha$, $(\alpha > 0)$ besitzt und wie bekannt [11]), kann bei der Multiplikation mit solchen Linearfaktoren die Anzahl der Zeichenwechsel nie wachsen. Damit ist bewiesen, dass

$$v(P(p+1)+s-1) \leqq p$$

ist; anderseits ist nach LAGUERRE:

$$v(s+P(p+1)-1) \geqq v(s+P(p+1)) \geqq p$$

also

$$v(s+P(p+1)) = p.$$

Die Abschätzung der Fussnote [10]) kann mit der schärferen ersetzt werden:

$$s+P(p+1) \leqq \frac{(w+3)^2}{4},$$

wo w die Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von $f(x)$ bezeichnet. Wir können also K auch gleich $\frac{(w+3)^2}{4}$ setzen, was im allgemeinen eine bessere untere Grenze für jene k festlegt, für welche

$$v(k) = p$$

ist. An diese Bemerkung anschliessend, möchte ich hier noch hervorheben, dass eine leichte Modification unserer Ausführungen folgende Verallgemeinerung ergiebt:

Ist $f(x)$ eine ganze transcendente Funktion vom Geschlecht 0, mit lauter reellen Wurzeln, deren Koeffizientenfolge w Zeichenwechsel aufweist (w endlich), so ist die Anzahl der Zeichenwechsel in der MACLAURIN'schen Reihe von

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

gleich der Anzahl der Wurzeln von $f(x)$ im Intervalle $(0, 1)$, sobald

$$k \geqq \frac{(w+3)^2}{4}$$

ist.

6. Jetzt werde ich noch beweisen, dass der Satz

$$\lim_{k=\infty} v(k) = p$$

auch dann besteht, wenn das Polynom $f(x)$ mit reellen Koefficienten auch komplexe

---

[11]) Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. I (Arithmetik und Algebra), S. 410.

Wurzeln hat, jedoch mit der Beschränkung, dass im Intervall $(0, 1)$ keine Wurzeln liegen, d. h.

$$p = 0$$

ist. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $f(0) \neq 0$ ist. Wir können also schreiben

$$f(x) = c\,k(x)\,\nu(x)\,\Pi(x)(1-x)^s$$

wo $k(x)$ das Produkt der zu den konjugierten komplexen Wurzeln gehörenden quadratischen Faktoren bedeutet und die übrigen Bezeichnungen die frühere Bedeutung haben.

Die Koeffizienten von $\nu(x)$ haben das nämliche Vorzeichen; auch in der MACLAURIN'schen Reihe von $\dfrac{\Pi(x)}{(1-x)^p}$ kommt kein Zeichenwechsel vor: die Gleichung

$$\lim_{k=\infty} v(k) = 0 = p$$

wird also bewiesen sein, wenn ich zeige, dass für genügend grosses i die Vorzeichen der Koeffizienten von

$$\frac{a + 2bx + cx^2}{(1-x)^{i+1}} = a + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \quad + \alpha_n x^n +$$

mit $\operatorname{sg} a$ übereinstimmen, falls die Diskriminante

$$ac - b^2$$

positiv ist.

Da für $n \geqq 2$

$$\alpha_n = \binom{n+i}{i} a + 2\binom{n+i-1}{i} b + \binom{n+i-2}{i} c,$$

ist

$$\alpha_n \frac{(n+i)(n+i-1)}{\binom{n+i}{i}} = A(i) + 2B(i)n + C(i)n^2$$

wo

$$A(i) = ai(i-1),$$
$$2B(i) = 2(a+b)i - (a+2b+c),$$
$$C(i) = a + 2b + c.$$

Wählen wir i so gross, dass das Vorzeichen der Diskriminante

$$A(i)C(i) - B(i)^2 = (ac - b^2)i^2 + (a+2b+c)bi - \frac{(a+2b+c)^2}{4}$$

mit dem Vorzeichen vom Anfangsgliede der rechten Seite übereinstimmt, so ist durchwegs

$$\operatorname{sg}\{A(i) + 2B(i)n + C(i)n^2\} = \operatorname{sg} A(i) = \operatorname{sg} a$$

also

$$\operatorname{sg} \alpha_n = \operatorname{sg} a \quad \text{für} \quad n \geqq 2.$$

Ist i genügend gross, se ist auch

$$\operatorname{sg} \alpha_i = \operatorname{sg} a.$$

Damit ist der Beweis geführt.

. . . .

Um die Richtigkeit der Gleichung

$$\lim_{k \to \infty} v(k) = p$$

nach der verwendeten Methode zu beweisen, ohne die Wurzeln irgendwie zu beschränken, müsste noch gezeigt werden, dass ein quadratisches Trinom mit konjugierten komplexen Wurzeln $a + 2bx + cx^2$ durch $(1 - x)^k$ dividiert eine Potenzreihe liefert, die für genügend grosses k p-fach positiv ist, wie auch p gewählt sein mag.

Dass dies geht, scheint mir sehr wahrscheinlich sein; indessen ist es mir aber nicht gelungen, einen Beweis dafür zu finden.

. . . .

Budapest, den 18. Dezember 1911.

MICHAEL FEKETE.

II.

. . . .

Ich glaube an das von Ihnen neu angeregte Problem mit einer nicht ganz ungeeigneten Methode herantreten zu können; leider ist die Lösung einer Beschränkung unterworfen, die aber aus rein *algebraischem* Gesichtspunkte betrachtet unwesentlich ist. Ich beweise nämlich den Satz:

Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

eine rationale ganze Funktion mit reellen Koeffizienten, die im Intervalle $(0, 1)$ keine mehrfache Wurzeln besitzt; dann lässt sich eine solche ganze Zahl K angeben, dass falls die ganze Zahl k grösser als K ist, die Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge der Potenzreihe

$$\frac{f(x)}{(1 - x)^{1+k}} = A_0^{(k)} + A_1^{(k)} x + \cdots + A_n^{(k)} x^n + \cdots$$

genau mit der Anzahl jener Wurzeln von $f(x)$ übereinstimmt, die in das Innere des Intervalles $(0, 1)$ fallen.

Ich nehme noch an, dass a_0 positiv, und $f(1)$ von Null verschieden sei. In diesen Annahmen liegen keine wesentliche Beschränkungen. Denn einerseits: die Wurzeln, die gleich Null sind, üben überhaupt keinen Einfluss auf die Zeichenwechsel oder Zeichenfolgen **aus; und andererseits,** wenn

$$f(1) = 0$$

d. h. die Zahl 1 eine etwa s-fache Nullstelle von $f(x)$ ist, genügt

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{(1-x)^s}$$

gewiss der Bedingung

$$\varphi(1) \gtrless 0.$$

1. Die Koeffizienten **der** MACLAURINschen Reihe von $\dfrac{f(x)}{(1-x)^{1+k}}$ sind die Zähler der CESÀROschen Mittel k-**ter** Ordnung der Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_m + 0 + 0 + \cdots;$$

ausführlich geschrieben

$$A_0^{(k)} = a_0$$

$$A_1^{(k)} = \binom{k+1}{k} a_0 + \binom{k}{k} a_1$$

$$= \binom{1+k}{1}\left(a_0 + a_1 \frac{1}{1+k}\right)$$

$$A_2^{(k)} = \binom{k+2}{k} a_0 + \binom{k+1}{k} a_1 + \binom{k}{k} a_2$$

$$= \binom{2+k}{2}\left(a_0 + a_1 \frac{2}{2+k} + a_2 \frac{2}{2+k}\frac{1}{1+k}\right)$$

. . . .

$$A_m^{(k)} = \binom{k+m}{k} a_0 + \binom{k+m-1}{k} a_1 + \quad + \binom{k}{k} a_m$$

$$= \binom{m+k}{m}\left(a_0 + a_1 \frac{m}{m+k} + \quad + a_m \frac{m}{m+k}\frac{m-1}{m+k-1}\cdots\frac{1}{1+k}\right)$$

. . . .

$$A_n^{(k)} = \binom{k+n}{k} a_0 + \binom{k+n-1}{k} a_1 + \quad + \binom{k+n-m}{k} a_m$$

$$= \binom{n+k}{n}\left(a_0 + a_1 \frac{n}{n+k} + \quad + a_m \frac{n}{n+k}\frac{n-1}{n-1+k} \quad \frac{n-\overline{m-1}}{n-\overline{m-1}+k}\right).$$

. . . .

Seien p und q zwei nichtnegative ganze Zahlen, u. z. sei p kleiner als q; ich führe die Bezeichnung ein:

$$f(p, q) = a_0 + a_1 \frac{p}{q} + a_2 \frac{p}{q}\frac{p-1}{q-1} + \cdots + a_p \frac{p}{q}\frac{p-1}{q-1} \quad \frac{1}{q-\overline{p-1}}$$

wo

$$a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_{m+n} = \cdots = 0.$$

Die Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge der Potenzreihe $\dfrac{f(x)}{(1-x)^{1+k}}$ ist genau dieselbe, wie in der Folge der CESÀROschen Mittel, die aus der vorigen entsteht, indem ihre einzelnen Glieder durch gewisse positive Zahlen dividiert werden; die CESÀROschen Mittel sind:

$$\frac{A_0^{(k)}}{\binom{k}{k}} = f(0, k), \quad \frac{A_1^{(k)}}{\binom{1+k}{k}} = f(1, 1+k), \qquad \frac{A_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} = f(n, n+k),$$

2. Es sei $p \geqq m$, dann ist

$$f\left(\frac{p}{q}\right) - f(p, q) = \sum_{\nu=2}^{m} a_\nu \left\{\left(\frac{p}{q}\right)^\nu - \frac{p}{q}\,\frac{p-1}{q-1} \cdots \frac{p-\overline{\nu-1}}{q-\overline{\nu-1}}\right\}.$$

Der Faktor, womit a_ν multipliziert ist, ist positiv, was sich durch wiederholte Anwendung eines elementaren Satzes ergibt. Sei nun q so gross gewählt, dass

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{2}{q}\right) \quad \left(1 - \frac{m-1}{q}\right) > \frac{1}{2};$$

dann wird gewiss

$$\left(\frac{p}{q}\right)^\nu - \frac{p}{q}\,\frac{p-1}{q-1} \cdots \frac{p-\overline{\nu-1}}{q-\overline{\nu-1}}$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^\nu \left(1 - \frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{q}} \cdot \frac{1-\frac{2}{p}}{1-\frac{2}{q}} \cdots \frac{1-\frac{\nu-1}{p}}{1-\frac{\nu-1}{q}}\right)$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^\nu \frac{\left(1-\frac{1}{q}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{q}\right) - \left(1-\frac{1}{p}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{p}\right)}{\left(1-\frac{1}{q}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{q}\right)}$$

$$< 2\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{2}{p} - \cdots - \frac{\nu-1}{p}\right)\right\} = \frac{\nu(\nu-1)}{p} \leqq \frac{m(m-1)}{p}.$$

Also, bei getroffener Wahl von q

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right) - f(p, q)\right| < (|a_2| + |a_3| + \qquad + |a_m|)\frac{m(m-1)}{p}.$$

3. Ähnlicherweise ergibt sich:

$$f(p, q) - f(p-1, q-1) = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu \left(\frac{p}{q} - \frac{p-\nu}{q-\nu}\right)\frac{p-1}{q-1}\,\frac{p-2}{q-2} \cdots \frac{p-\overline{\nu-1}}{q-\overline{\nu-1}}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu \frac{(q-p)\nu}{q(q-\nu)}\,\frac{p-1}{q-1} \cdots \frac{p-\overline{\nu-1}}{q-\overline{\nu-1}}$$

$$= \frac{q-p}{q(q-1)} \sum_{\nu=1}^{m} \nu a_\nu \frac{p-1}{q-2}\,\frac{p-2}{q-3} \quad \frac{p-\overline{\nu-1}}{q-\nu}$$

$$= \frac{q-p}{q(q-1)}\left\{f'\left(\frac{p}{q}\right) - \sum_{\nu=2}^{m} \nu a_\nu \left(\left(\frac{p}{q}\right)^{\nu-1} - \frac{p-1}{q-2}\,\frac{p-2}{q-3} \cdots \frac{p-\overline{\nu-1}}{q-\nu}\right)\right\}$$

wo der heraustretende Faktor ersichtlich positiv und die in der geschweiften Klammer an zweiter Stelle stehende Summe dem absoluten Betrage nach kleiner ist, als

$$(2|a_2| + 3|a_3| + \cdots + m|a_m|)\frac{m(m-1)}{p}.$$

4. Es sei

$$\alpha = \frac{a_0}{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|}.$$

Die Zahl α hat folgende Eigenschaften:

I. α ist positiv.

II. Ist $\alpha < 1$, dann ist α kleiner (oder gleich) als die kleinste positive Wurzel von $f(x)$; Gleichheit kann nur eintreten, wenn $f(x)$ linear ist.

III. Ist aber $\alpha \geqq 1$, dann hat $f(x)$ keine Wurzel, die kleiner als Eins ist; unserer Annahme zufolge ist also die kleinste positive Wurzel von $f(x)$, falls sie überhaupt existiert, grösser als die Einheit.

IV. Ist $\frac{p}{q} < \alpha$, so ist $f(p, q)$ positiv; entgegengesetztenfalls wäre

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + \cdots + a_m\frac{p}{q}\frac{p-1}{q-1}\cdots\frac{p-\overline{m-1}}{q-\overline{m-1}} \leqq 0$$

d. h.

$$a_0 \leqq -a_1\frac{p}{q} - a_2\frac{p}{q}\frac{p-1}{q-1} - \cdots - a_m\frac{p}{q}\frac{p-1}{q-1}\cdots\frac{p-\overline{m-1}}{q-\overline{m-1}}$$

$$\leqq (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|)\frac{p}{q}$$

oder

$$\alpha \leqq \frac{p}{q}$$

was wir eben ausgeschlossen haben.

5. Dies vorausgeschickt, unterscheide ich nun zwei Fälle; ist erstens $\alpha \geqq 1$, so hat einerseits $f(x)$ keine positive Wurzel kleiner als Eins (§ 4. III.) und andererseits sind die Glieder der unendlichen Zahlenfolge

$$f(0, k),\quad f(1, 1+k),\quad f(2, 2+k), \ldots, f(n, n+k), \ldots$$

alle positiv, falls nur $k > 0$ (§ 4. IV.); sie stimmen jedoch im Vorzeichen mit den Koeffizienten der MACLAURINschen Entwicklung von $\frac{f(x)}{(1-x)^{1+k}}$ überein. Die Übereinstimmung zwischen der Anzahl der Wurzeln in $(0, 1)$ und der Anzahl der Zeichenwechsel ist also vollständig; beide Anzahlen sind nämlich gleich Null.

Ist aber zweitens $\alpha < 1$, so seien die Koeffizienten der fraglichen MACLAURINschen Entwicklung, die mit den Indices

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, n, \ldots$$

versehen sind, der Reihe nach den Punkten mit den Abscissen

$$\frac{0}{k},\quad \frac{1}{1+k},\quad \frac{2}{2+k},\quad \frac{3}{3+k}, \ldots, \frac{n}{n+k}, \ldots$$

zugeordnet, die alle dem Intervall (o, 1) angehören. Die Koeffizienten von verschiedenen Indices

$$A_0^{(k)},\quad A_1^{(k)},\quad A_2^{(k)},\quad A_3^{(k)},\ \ldots,\ A_n^{(k)},\ \ldots$$

stimmen im Vorzeichen mit den verschiedenen CESÀROschen Mitteln k-ter Ordnung überein, d. h. mit den Zahlen

$$f(0, k),\ f(1, 1+k),\ f(2, 2+k),\ f(3, 3+k),\ \ldots,\ f(n, n+k),\ \ldots$$

während in den Punkten der obigen Abscissenfolge die Funktion $f(x)$ die Werte

$$f\left(\frac{0}{k}\right),\ f\left(\frac{1}{1+k}\right),\ f\left(\frac{2}{2+k}\right),\ f\left(\frac{3}{3+k}\right),\ \ldots,\ f\left(\frac{n}{n+k}\right),\ \ldots$$

annimmt. Höheren Indices entsprechen Punkte von grösseren Abscissen, und der einzige Grenzpunkt aller durch diese Zuordnung ausgezeichneten Punkte ist der Einheitspunkt. Wenn wir aus dem Intervall (o, 1) irgendein *partielles Intervall* herausheben, so nehmen wir dadurch aus der Folge der Koeffizienten eine *entsprechende Teilfolge* heraus; ich bezeichne damit die Gesammtheit derjenigen Koeffizienten $A_n^{(k)}$, die solchen ausgezeichneten Punkten entsprechen, welche in das herausgehobene Teilintervall fallen. Die Teilfolge enthält Koeffizienten in unendlicher oder endlicher Anzahl, jenachdem das Teilintervall den Einheitspunkt zum Endpunkte hat oder nicht.

Ich sehe nun ab von zwei speciellen Fällen, nämlich wenn $f(x)$ im Intervall (o, 1) keine Wurzeln hat und wenn $f(x)$ linear ist; diese Fälle lassen sich auf ähnliche Art erledigen, wie der allgemeinere.

Ich teile das Intervall (o, 1) in Teilintervalle in folgender Weise: zuerst nehme ich das Intervall $(0, \alpha)$; im $(\alpha, 1)$ liegen nun die fraglichen Nullstellen von $f(x)$, deren jede ich mit einem Intervall *erster Art* umgebe, d. h. mit einem solchen, das gänzlich im Innern von $(\alpha, 1)$ liegt, und in welchem, die Endpunkte eingerechnet, $f'(x)$ nicht verschwindet; die von $(\alpha, 1)$ übrigbleibenden Intervalle sollen *Intervalle zweiter Art* heissen. In den Intervallen zweiter Art hat $|f(x)|$ eine von Null verschiedene untere Grenze, in den Intervallen erster Art ist das mit $|f'(x)|$ der Fall; diese unteren Grenzen sollen f und f' genannt werden.

Es sei nun n_k die Zahl, welche den Ungleichungen

$$\frac{n_k}{n_k+k} \leqq \alpha < \frac{n_k+1}{n_k+1+k}$$

genügt, d. h.

$$n_k = \left[\frac{\alpha k}{1-\alpha}\right].$$

Ersichtlicherweise wächst n_k mit k über alle Grenzen. Wählen wir weiter k so gross, dass

I. $$\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right) \quad \left(1-\frac{m-1}{k}\right) > \frac{1}{2}$$

II. $$n_k \geqq m$$

III. $$(|a_2| + |a_3| + \cdots + |a_m|)\frac{m(m-1)}{n_k} < f$$

IV. $$(2|a_2| + 3|a_3| + \cdots + m|a_m|)\frac{m(m-1)}{n_k} < f'.$$

Dann werden die Glieder der einzelnen Teilfolgen, welche dem Intervalle $(0, \alpha)$ und den Intervallen zweiter Art entsprechen, jeweilig dasselbe Vorzeichen haben und zwar das von $f(x)$ in den zugeordneten Intervallen. Die den Intervallen erster Art entsprechenden Teilfolgen werden monoton wachsend oder abnehmend, je nachdem $f'(x)$ in dem betreffenden Intervalle positiv oder negativ ausfällt. In einer monotonen Folge aber ist höchstens ein Zeichenwechsel möglich. Da nun jede solche monotone Folge zwischen zwei andern Folgen konstanten Vorzeichens eingeschlossen ist (jede wachsende zwischen eine negative und eine positive, jede abnehmende zwischen eine positive und eine negative) entspricht auch jeder monotonen Folge, d. h. jedem Intervall erster Art, d. h. jeder Wurzel im Intervall $(0, 1)$ in der Tat ein Zeichenwechsel. In solcher Weise wurden jedoch *alle* Zeichenwechsel erschöpft. Qu. e. d.

Zu diesen Entwicklungen hat Herr Fejér noch Folgendes bemerkt: es lässt sich bei gegebenem k ein solcher Index N angeben, dass alle Zahlen

$$f(N, N+k), \quad f(N+1, N+1+k), \ldots, f(N+n, N+n+k), \ldots$$

von demselben Vorzeichen sind, d. h. dass die Ungleichung

$$|f(1) - f(\nu, \nu+k)| < |f(1)|$$

immer besteht, falls nur $\nu \geqq N$.

Man erhält durch partielle Summation

$$f(1) - f(\nu, \nu+k) = a_1\left(1 - \frac{\nu}{\nu+k}\right) + a_2\left(1 - \frac{\nu}{\nu+k}\frac{\nu-1}{\nu+k-1}\right) + \cdots$$

$$\cdots + a_m\left(1 - \frac{\nu}{\nu+k} \cdots \frac{\nu-\overline{m-1}}{\nu+k-\overline{m-1}}\right)$$

$$= a_m \frac{\nu}{\nu+k} \cdots \frac{\nu-\overline{m-2}}{\nu+k-\overline{m-2}}\left(1 - \frac{\nu-\overline{m-1}}{\nu+k-\overline{m-1}}\right)$$

$$+ (a_m + a_{m-1})\frac{\nu}{\nu+k} \cdots \frac{\nu-\overline{m-3}}{\nu+k-\overline{m-3}}\left(1 - \frac{\nu-\overline{m-2}}{\nu+k-\overline{m-2}}\right) + \cdots$$

$$\cdots + (a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1)\left(1 - \frac{\nu}{\nu+k}\right)$$

$$|f(1) - f(\nu, \nu+k)| < |a_m| \frac{k}{\nu+k-\overline{m-1}}$$

$$+ |a_m + a_{m-1}| \frac{k}{\nu+k-\overline{m-2}} + \cdots + |a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1| \frac{k}{\nu+k}.$$

Nennen wir also M die grösste zwischen den Zahlen

$$|a_m|, \quad |a_m + a_{m-1}|, \ldots, |a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1|$$

so ist gewiss

$$|f(1) - f(\nu, \nu+k)| < \frac{mMk}{\nu+k-\overline{m-1}}.$$

Ist also ν so gross gewählt, dass

$$\frac{mMk}{\nu + k - m - 1} < |f(1)| \quad \text{d. h.} \quad \nu > \frac{mMk}{|f(1)|} + m - k - 1$$

so wird $f(\nu, \nu + k)$ gewiss von demselbem Vorzeichen sein, als $f(1)$.

Wollen wir also die Zeichenwechsel in unserer Reihe abzählen, so können wir uns auf die N ersten Glieder beschränken, wo

$$N = \left[\frac{mMk}{|f(1)|} + m - k\right].$$

Die Untersuchung der Zeichenwechsel führt zu einer neuartigen Berechnung der Wurzeln, die zwar eine langsame Approximation liefert, jedoch den Vorteil besitzt, auch in viel allgemeineren Fällen anwendbar zu sein. Dies beruht darauf, was Sie schon bei der ersten Erwähnung meiner Idee bemerkt haben, dass nämlich die eben auseinandergesetzte Annäherungseigenschaft der CESÀROschen Mittel auch bei Potenzreihen bestehen bleibt.

6. Es sei die Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

im Einheitskreise konvergent

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{1+k}} = A_0^{(k)} + A_1^{(k)} x + A_2^{(k)} x^2 + \cdots + A_n^{(k)} x^n + \cdots$$

$$f(n, n+k) = \frac{A_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}.$$

Denken wir uns die Gitterpunkte der (n, k) Ebene, deren Koordinaten nichtnegative ganze Zahlen sind und ordnen wir dem Gitterpunkte (n, k) den Wert $f(n, n+k)$ zu. Ziehen wir in der (n, k) Ebene zwei parallele Gerade, welche mit der positiven k-Achse einen Winkel mit der Richtungstangente a einschliessen $(0 \leqq a < \infty)$ [1]) und nehmen wir unendlich viele Werte $f(n, n+k)$, deren repräsentierende Punkte zwischen den beiden parallelen Geraden liegen; dann hat die Menge dieser Werte den einzigen Häufungspunkt $f\left(\frac{a}{1+a}\right)$. Allgemeiner lässt sich Folgendes aussagen: seien α und β **positive, echte Brüche $(\alpha < \beta)$ und sei ρ ein Punkt im Intervalle (α, β); dann finden sich zu einer willkürlich gegebenen Zahl ε solche K und η, dass, wenn nur**

$$k > K \quad \text{und} \quad \left|\rho - \frac{n}{n+k}\right| < \eta$$

immer

$$|f(n, n+k) - f(\rho)| < \varepsilon.$$

[1]) Auf den Fall $a = \infty$ beziehen sich die Sätze von ABEL, FROBENIUS, HÖLDER, CESÀRO, etc.

Dies ergibt sich aus der Abschätzung

$$|f(n, n+k) - f(\rho)| \leqq \frac{M(M-1)}{n_k} \sum_{2}^{M} |a_\nu| + 2 \sum_{M+1}^{\infty} |a_\nu| \beta^\nu + \left| f(\rho) - f\left(\frac{n}{n+k}\right) \right|$$

mit Hinzuziehung der absoluten Konvergenz der Reihe $f(\beta)$ und der gleichmässigen Stetigkeit der Funktion $f(x)$. (Hier bezeichnet M eine willkürliche ganze Zahl $\geqq 2$; zwischen den Zahlen α, k und n_k besteht dieselbe Beziehung, als zwischen den geichbezeichneten im § 5). Aus der Abschätzung im § 3. folgt ein ähnliches Resultat: ist

$$\lim \frac{n}{n+k} = x$$

so ist auch

$$\lim (n+k)\{f(n, n+k) - f(n-1, n+k-1)\} = (1-x) f'(x).$$

Seien nun die Koeffizienten der Potenzreihe reell; wir bezeichnen mit

$$\nu_0, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \ldots, \nu_k, \ldots$$

gewisse Indices; es soll nämlich ein Zeichenwechsel auftreten:

zwischen dem ν_0-ten und $\nu_0 + 1$-ten CESÀROschen Mittel 0-ter Ordnung [a])

zwischen dem ν_1-ten und $\nu_1 + 1$-ten CESÀROschen Mittel 1-ter Ordnung

. . . .

zwischen dem ν_k-ten und $\nu_k + 1$-ten CESÀROschen Mittel k-ter Ordnung u. s. w.

Besitzt dann die Zahlenmenge

$$\frac{\nu_0}{0+\nu_0}, \quad \frac{\nu_1}{1+\nu_1}, \quad \frac{\nu_2}{2+\nu_2}, \ldots, \frac{\nu_k}{k+\nu_k}, \ldots$$

irgend einen von der Einheit verschiedenen Häufungspunkt ρ, so ist ρ eine Nullstelle der Funktion $f(x)$; denn $f(\rho)$ ist ein Grenzwert von Zahlen, unter denen unendlich viele positive und unendlich viele negative (oder unendlich viele positive und verschwindende oder unendlich viele negative und verschwindende) vorkommen. Die Ableitung der angeführten Menge kann ihrerseits höchstens einen einzigen Häufungspunkt haben, den Einheitspunkt, da doch $f(x)$ im Innern des Einheitskreises holomorph und nicht identisch Null ist. Ich behaupte nun, dass, wenn

$$\nu_0, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \ldots, \nu_k, \ldots$$

die Indices jener CESÀROschen Mittel bezeichnen, denen, der Reihe nach, in den consecutiven Folgen immer das *erste* (bzw. das s-te) Zeichenwechsel entspricht, die Zahlenfolge

$$\frac{\nu_0}{0+\nu_0}, \quad \frac{\nu_1}{1+\nu_1}, \quad \frac{\nu_2}{2+\nu_2}, \ldots, \frac{\nu_k}{k+\nu_k}, \ldots$$

nur einen einzigen Häufungspunkt besitzt, d. h. konvergiert.

---

[a]) Tritt zwischen den Gliedern α_r, α_{r+1} der Folge

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots \alpha_r, \ldots$$

ein Zeichenwechsel auf, so nennen wir r den « Inder dieses Zeichenwechsels ».

Ziehen wir in der Ebene (n, k) den Linienzug, dessen consecutive Ecken

$$(\nu_0, 0), \quad (\nu_1, 1), \quad (\nu_2, 2), \ldots, (\nu_k, k), \ldots$$

sind, und den wir die *erste* (s-te) *Zeichenwechselkurve* nennen wollen, dann muss gezeigt werden, dass dieselbe eine bestimmte asymptotische Richtung besitzt.

I. LEMMA. — Seien $\sum\limits_0^\infty b_n x^n$ und $\sum\limits_0^\infty c_n x^n$ Potenzreihen mit reellen Koeffizienten,

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)$$
$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

d. h.

$$\begin{aligned} c_0 &= b_0, \\ c_1 &= b_0 + b_1, \\ c_2 &= b_0 + b_1 + b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \end{aligned}$$

und sei in der Folge

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

der 1-te, 2-te, ..., s-te Zeichenwechsel zwischen den Gliedern

$$b_{i_1} \text{ und } b_{i_1+1}, \quad b_{i_2} \text{ und } b_{i_2+1}, \quad \ldots, \quad b_{i_s} \text{ und } b_{i_s+1}$$

Da eine monotone Folge höchstens einmal die Null passieren kann, ist ersichtlich, dass:

in der Folge $c_0, c_1, \ldots, c_{i_1}$ kein Zeichenwechsel ist

in der Folge $c_0, c_1, \ldots, c_{i_1}, c_{i_1+1}, \ldots, c_{i_2}$ höchstens 1 Zeichenwechsel

. . . .

in der Folge $c_0, c_1, \ldots, c_{i_1}, \ldots, c_{i_2}, \ldots, c_{i_s}$ höchstens $s-1$ Zeichenwechsel vorkommen. Also schliesse ich: der Index des s-ten Zeichenwechsels in der Folge der b_i ist *nicht grösser*, als der Index des s-ten Zeichenwechsels in der Folge der c_i. Diese Bemerkung wollte ich unter Lemma I. anführen.

Da nun

$$\nu_0, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \ldots, \nu_k, \ldots .$$

Indices des s-ten Zeichenwechsels in der Koeffizientenfolge solche Potenzreihen bedeuten, die alle aus der ersten durch successive Multiplikation mit der geometrischen Reihe entstanden sind, ist (Lemma I. in betracht gezogen)

$$\nu_0 \leqq \nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3 \leqq \cdots \leqq \nu_k \leqq \cdots .$$

II LEMMA. — Lässt sich in der Folge $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$

$$b_n - b_{n+1} < \eta_n$$

setzen, wo $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ eine nie wachsende, zu Null konvergierende unendliche Folge von positiven Zahlen bedeutet, dann hat die Folge $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, falls sie zwei verschiedene Grenzpunkte b und b' besitzt $(b < b')$ alle Punkte des Intervalles (b, b') zu Grenzpunkten.

Die Konsequenz, dass die Glieder der Folge im Intervalle (b, b') überall dicht sind, hat Herr FEJÉR [3]) unter der engeren Bedingung nachgewiesen, dass die Differenz zweier konsekutiven Glieder mit wachsendem Index dem absoluten Betrage nach unendlich abnimmt; die hier gegebene Bedingung kann auch so ausgesprochen werden, dass falls in der Folge $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ ein Abnehmen eintritt, dieses nur in einem mit unendlich wachsendem n unendlich klein werdenden Betrage stattfinden kann. Der Satz FEJÉR's verhält sich zu dem hier zu beweisenden ähnlich, wie ein bekannter Satz HARDY's über arithmetische Mittel zu seiner LANDAU'schen Verallgemeinerung.

Würde nämlich der Satz nicht bestehen, so liesse sich ein Punkt c des Intervalles (b, b') finden, derart, dass in das Intervall $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, das gänzlich im Innern von (b, b') gelegen ist, kein einziger Punkt zu liegen kommt, sobald $n > N$. Sei ferner $\eta_{N'} < 2\varepsilon$; da weiter b' auch Grenzpunkt ist, muss sich ein $b_\nu (\nu > N, \nu > N')$ angeben lassen, der rechts von $c+\varepsilon$ liegt. Daraus würde aber folgen, dass kein einziges b_n existiert, das kleiner als c und dessen Index grösser als ν ist; das steht mit dem Umstande in Wiederspruch, dass auch b eine Häufungsstelle ist. Lemma II. ist also bewiesen.

Die Folge

$$\frac{\nu_0}{0+\nu_0}, \quad \frac{\nu_1}{1+\nu_1}, \quad \frac{\nu_2}{2+\nu_2}, \quad \frac{\nu_3}{3+\nu_3}, \ldots, \frac{\nu_k}{k+\nu_k}, \ldots$$

genügt den Bedingungen des Lemma II.; es ist nämlich

$$\frac{\nu_k}{k+\nu_k} - \frac{\nu_{k+1}}{k+1+\nu_{k+1}} = \frac{(\nu_k - \nu_{k+1})k + \nu_k}{(k+\nu_k)(k+1+\nu_{k+1})} \leqq \frac{\nu_k}{(k+\nu_k)(k+1+\nu_k)} < \frac{1}{k}$$

da doch $\nu_k - \nu_{k+1}$ nie positiv sein kann. Hätte also die fragliche Folge zwei verschiedene Häufungsstellen b, b', so würde $f(x)$ — nach einer vorangehenden Bemerkung dieses Paragraphen — für jede Stelle des Intervalls (b, b') verschwinden, was doch ausgeschlossen ist. — Letzterer Teil des Beweises könnte auch geometrisch durchgeführt werden.

So gelangten wir zu einer neuen Methode reelle Wurzeln reeller Potenzreihen zu ermitteln. Aus der von LAGUERRE verallgemeinerten DESCARTESsche Zeichenregel folgt, dass die Anzahl der Zeichenwechsel nie unter die Anzahl der Wurzeln sinken kann; aber es bleibt unentschieden, ob durch die angegebene Methode alle Wurzeln und mit richtiger Multiplizität erhalten werden können; der in §§ 1.-5. bewiesene Satz zeigt, dass sie vollständig zum Ziele führt im Falle eines reellen Polynoms mit lauter einfachen Wurzeln.

Budapest, den 15. Jänner 1912.

GEORG PÓLYA.

---

[3]) L. FEJÉR: *a) Sur la série de* FOURIER [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. CXLII (1. Semester 1906), S. 501-503 (séance du 26 février 1906]; *b) A* FOURIER-*féle sorról* (Elsö közlemény) [Mathematikai és Természettudományi Értesítö, Bd. XXIV (1906), 292-297]. In diesen Arbeiten wird die Schlussweise auf die FOURIER'sche Reihe angewandt; andere Anwendungen auf gewisse Fragen der successiven Approximation sind mir aus mündlicher Mitteilung bekannt.

III.

. . . .

Die Annäherungseigenschaft der arithmetischen Mittel, mit deren Entdeckung Sie LAGUERRE's Problem für Polynome mit einfachen Wurzeln gelöst haben, stellt den tiefsten Grund der Tatsache

$$\lim_{k=\infty} v(k) = p \tag{1}$$

ins Licht. Um das Problem ganz allgemein zu lösen, habe ich den Zusammenhang zwischen den arithmetischen Mitteln und den Funktionswerten weiter untersucht. Meine Untersuchungen führten in zwei Richtungen über unsere bisher gefundenen Resultate hinaus. Erstens bewies ich die Gleichung (1) für *jedes* Polynom und auch für Potenzreihen, die im Einheitsheitskreise konvergieren und im Punkte $x = 1$ gewissen Beschränkungen unterworfen sind. (Satz I.) Zweitens zeigte ich, dass das durch Sie gefundene Verfahren zur Ermittelung der Wurzeln von $f(x) = 0$ zwischen 0 und 1 *jede* Wurzel in diesem Intervalle und zwar mit *richtiger Multiplizität* ergibt, wenn $f(x)$ durch eine reelle Potenzreihe definiert ist, die im Einheitskreise konvergiert, sonst aber gar keiner Beschränkung unterliegt. (Satz II).

Der genauen Formulierung meiner Ergebnisse schicke ich drei Hilfssätze voraus, deren erster ein ummittelbares Korollar Ihrer Resultate ist.

Mit $f(x)$ werde ich im folgenden immer eine Potenzreihe bezeichnen, die im Einheitskreise konvergiert und reelle Koeffizienten hat. Sei $f(n, n+k)$ das CESÀRO'sche Mittel k-ter Ordnung der n ersten Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Die Glieder der Folge

$$f(0, k),\ f(1, 1+k), \dots, f(n, n+k), \dots, \tag{2}$$

deren Argumente n und $n+k$ der Ungleichung

$$\alpha < \frac{n}{n+k} < \beta \qquad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1)$$

genügen, bilden eine Teilfolge von (2); um die Ausdrucksweise zu erleichtern, soll diese « zum Intervall (α, β) gehörig » genannt werden.

HILFSSATZ I. — Ist $f(x)$ für $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $(0 < \alpha < \beta < 1)$ von Null verschieden, dann gibt es eine solche Zahl $K = K(\alpha, \beta)$, dass für jedes $k > K$ die Glieder der zum Intervall (α, β) gehörigen Teilfolge von (2) das Vorzeichen von $f(\alpha)$ haben.

Zum Beweise des Hilfssatzes II. brauche ich folgendes

LEMMA. — Ist die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge der Differenzen

$$\alpha_1 - \alpha_0,\quad \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_m - \alpha_{m-1}$$

gleich w, so können in der Folge

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

nicht mehr, als $w+1$ Zeichenwechsel vorkommen.

Beweis: Wechseln die Zahlen

$$\alpha_1 - \alpha_0, \quad \alpha_2 - \alpha_1, \quad \alpha_m - \alpha_{m-1}$$

w-mal ihr Vorzeichen, so kann die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge

$$(3) \qquad \alpha_0, \quad \alpha_1 - \alpha_0, \quad \alpha_2 - \alpha_1, \quad \alpha_m - \alpha_{m-1}, \quad -\alpha_m$$

$w + 2$ nicht übertreffen.

(3) ist aber die Folge der Koeffizienten des Produktes

$$(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_m x^m)(1 - x),$$

sie muss also nach dem bekannten Lemma von SEGNER mit einer ungeraden Zahl mehr Zeichenwechsel enthalten, als die Folge

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_m.$$

Hieraus folgt unser Lemma.

HILFSSATZ II. — Ist der r-te Differentialquotient von $f(x)$ im Innern und an den Grenzen des Intervalls (α, β), wo $0 < \alpha < \beta < 1$, von 0 verschieden, so kann $K = K(\alpha, \beta)$ so gross gewählt werden, dass für jedes beliebige, aber fixe k, das K übertrifft, die zum Intervall (α, β) gehörige Teilfolge von (2) höchstens r Zeichenwechsel aufweist.

Beweis: Es bezeichne $f^{(s)}(n, n+k)$ den analogen Ausdruck für

$$f^{(s)}(x) = s! \sum_{i=s}^{\infty} a_i \binom{i}{s} x^{i-s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, r)$$

wie $f(n, n+k)$ für $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

Ist $f^{(r)}(x)$ im Innern und an den Grenzen von (α, β) von 0 verschieden, so kann die positive Zahl δ so klein gewählt werden, dass $\beta + \delta < 1$ ist und $|f^{(r)}(x)|$ im Intervall $(\alpha, \beta + \delta)$ eine positive untere Grenze besitzt.

Nach Hilfssatz I. kann also $K = K(\alpha, \beta + \delta)$ so gross gewählt werden, dass für jedes k und ν, die den Ungleichungen

$$k > K, \quad \alpha < \frac{\nu}{\nu + k} < \beta$$

genügen,

$$\operatorname{sg} f^{(r)}(\nu, \nu + k) = \operatorname{sg} f^{(r)}(\alpha)$$

ist.

Sei nun $k > K$ so gewählt, dass, wenn unter den Brüchen $\frac{\nu}{\nu + k}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$

$$(S^{(0)}) \qquad \frac{n}{n+k}, \quad \frac{n+1}{n+k+1}, \quad \frac{n+m}{n+k+m}$$

diejenigen sind, die in das Intervall (α, β) fallen, $m > 2r$ sei und dabei die Glieder

der Folgen

$$(S^{(1)}) \qquad \frac{n}{n+k-1} \quad \frac{n+1}{n+k}, \quad \frac{n+m-2}{n+k+m-3}, \quad \frac{n+m-1}{n+k+m-2}$$

$$(S^{(2)}) \qquad \frac{n}{n+k-2}, \quad \frac{n+1}{n+k-1}, \quad \frac{n+m-2}{n+k+m-4}$$

. . . .

$$(S^{(r)}) \qquad \frac{n}{n+k-r}, \quad \frac{n+1}{n+k-r+1}, \ldots, \frac{n+m-r}{n+k+m-2r}$$

grösser als α und kleiner als $\beta+\delta$ ausfallen [1]).

Bilden wir für diesen Wert von k die Folgen

$$(S_0) \qquad \begin{cases} f(n,\, n+k),\ f(n+1,\, n+k+1), \ldots, \\ f(n+m-1,\, n+k+m-1),\ f(n+m,\, n+k+m) \end{cases}$$

$$(S_1) \quad f^{(1)}(n,\, n+k-1),\ f^{(1)}(n+1,\, n+k), \ldots, f^{(1)}(n+m-1,\, n+k+m-2)$$

$$(S_2) \quad f^{(2)}(n,\, n+k-2),\ f^{(2)}(n+1,\, n+k-1), \ldots, f^{(2)}(n+m-2,\, n+k+m-4)$$

. . . .

$$(S_r) \quad f^{(r)}(n,\, n+k-r),\ f^{(r)}(n+1,\, n+k-r+1), \ldots, f^{(r)}(n+m-r,\, n+k+m-2r).$$

Die Differenz der nach einander folgenden Glieder in (S_i) $(i=0, 1, \ldots, r-1)$ unterscheiden sich von den Gliedern in (S_{i+1}) nur in positiven Faktoren. Es ist nähmlich [2])

$$f(n+1,\, n+1+k) - f(n,\, n+k) = \frac{k}{(n+k)(n+k+1)} f^{(1)}(n,\, n+k-1)$$

---

[1]) Dass durch geeignete Wahl von k die Bedingung $m > 2r$ befriedigt werden kann, ist evident, denn mit wachsendem k fallen immer mehr Glieder der Folge $\frac{\nu}{\nu+k}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ in das Intervall (α, β). Anderseits wird für $m > 2r$ die Forderung, dass die Glieder von $(S^{(1)}), (S^{(2)}), (S^{(3)}), \ldots, (S^{(r)})$ die Zahl α überschreiten, von selbst erfüllt; es ist nähmlich

$$\alpha < \frac{n}{n+k} < \frac{n}{n+k-1} < \frac{n}{n+k-2} < \cdots < \frac{n}{n+k-r}$$

und in jeder einzelnen Folge $(S^{(i)})$ wachsen die Glieder monoton. Endlich bleiben die Glieder dieser Folgen kleiner als $\beta+\delta$, wenn k so gewählt wird, dass $\frac{|2\beta-1|r}{n+k} < \delta$; denn

$$\frac{r+m-i}{n+m+k-2i} < \frac{(n+m+k)\beta - i}{n+m+k-2i} = \beta + \frac{(2\beta-1)i}{n+k+m-2i} < \beta + \frac{|2\beta-1|r}{n+k}.$$

[2]) Dies zeigt die folgende einfache Rechnung:

$$f(n+1,\, n+1+k) - f(n,\, n+k) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \frac{n+1}{n+1+k} \cdot \frac{n}{n+k} \cdots \frac{n-i+2}{n+k-i+2}$$

$$- \sum_{i=1}^{n+1} a_i \frac{n}{n+k} \cdot \frac{n-1}{n+k-1} \cdots \frac{n-i+1}{n+k+i+1}$$

$$= a_1 \left(\frac{n+1}{n+k+1} - \frac{n}{n+k} \right) + \sum_{i=2}^{n+1} a_i \frac{n}{n+k} \cdots \frac{n-i+2}{n+k-i+2} \left[\frac{n+1}{n+k+1} - \frac{n-i+1}{n+k-i+1} \right]$$

$$= \frac{k}{(n+k)(n+k+1)} \left\{ a_1 + \sum_{i=2}^{n+1} i a_i \frac{n}{n+k-1} \cdots \frac{n-i+2}{n+k-i+1} \right\} = \frac{k}{(n+k)(n+k+1)} f^{(1)}(n,\, n+k-1)$$

und ähnlich

$$f^{(1)}(n+1, n+1+k) - f^{(1)}(n, n+k) = \frac{k}{(n+k)(n+k+1)} f^{(2)}(n, n+k-1)$$

. . . .

$$f^{(r-1)}(n+1, n+1+k) - f^{(r-1)}(n, n+k) = \frac{k}{(n+k)(n+k+1)} f^{(r)}(n, n+k-1).$$

Nun wählten wir k derart, dass alle Glieder in (S_r) das Vorzeichen von $f^{(r)}(x)$ haben. Nach dem vorausgeschickten Lemma kann also in der Folge (S_{r-1}) höchstens ein Zeichenwechsel vorkommen; die wiederholte Anwendung desselben Lemma ergibt, dass die obere Grenze der Zeichenwechsel in (S_{r-2}) zwei, in (S_{r-3}) drei, u. s. w., und endlich in (S_0) gleich r ist.

Damit ist also der Hilfssatz II. bewiesen.

Hilfssatz III. — Sei ξ eine, im Innern des Intervalls $(0, 1)$ liegende r-fache Wurzel von

$$f(x) = 0.$$

Wählen wir die positive Zahl h so klein, dass 1° die Ungleichungen $0 < \xi - h$, $\xi + h < 1$ befriedigt seien, 2° im Innern und an den Grenzen des Intervalls $(\xi - h, \xi + h)$ die Funktion $f(x)$ keine weitere Nullstelle habe und ebenda der erste, für $x = \xi$ nicht verschwindende Differentialquotient $f^{(r)}(x)$ ein konstantes Vorzeichen bewahre. Dann kann $K = K(h)$ so gewählt werden, dass für jedes beliebige, aber fixierte $k > K$ in der Teilfolge von (2), die zum Intervall $(\xi - h, \xi + h)$ gehört, genau r Zeichenwechsel vorkommen.

Beweis: Dass die Anzahl der besagten Zeichenwechsel r nicht überschreiten kann, folgt aus Hilfssatz II., wenn dort $\alpha = \xi - h$, $\beta = \xi + h$ gesetzt wird. Es ist noch zu zeigen, dass sie auch nicht unter r bleiben kann.

Die Richtigkeit der Behauptung folgt für $r = 1$, d. h. für eine einfache Wurzel nach Hilfssatz I. Nun zeige ich, dass sie auch für eine r-fache Wurzel besteht, angenommen, dass sie für eine $(r-1)$-fache richtig ist. Sei

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\xi - x}$$

und bezeichne $\varphi(\nu, \nu + k)$ den analogen Ausdruck für $\varphi(x)$, wie $f(\nu, \nu + k)$ für $f(x)$. Dann besteht die Identität

$$f(\nu, \nu + k) = \xi \varphi(\nu, \nu + k) - \varphi(\nu - 1, \nu - 1 + k).$$

Ich wähle die Zahl h derart, dass sie die obigen Bedingungen 1° und 2° in Bezug auf $f(x)$ und $\varphi(x)$ gleichzeitig befriedige. Nach unserer Annahme kann K so gross gewählt werden, dass für $k > K$ die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge

$$\varphi(n, n+k), \quad \varphi(n+1, n+1+k), \ \ldots, \ \varphi(N, N+k)$$

nicht unter $r - 1$ bleibt, falls

$$\frac{n-1}{n+k-1} < \xi - h \leqq \frac{n}{n+k} < \frac{n+1}{n+1+k} < \cdots < \frac{N}{N+k} \leqq \xi + h < \frac{N+1}{N+1+k}$$

ist. Nach SEGNER's Lemma muss die Folge

$$\xi\varphi(n, n+k),$$
$$\xi\varphi(n+1, n+1+k) - \varphi(n, n+k) = f(n+1, n+1+k)$$
$$\xi\varphi(n+2, n+2+k) - \varphi(n+1, n+1+k) = f(n+2, n+2+k)$$

$$\xi\varphi(N, N+k) - \varphi(N-1, N-1+k) = f(N, N+k)$$

mindestens auch $r-1$ Zeichenwechsel enthalten; ist aber K genügend gross gewählt, so haben $\varphi(n, n+k)$ und $f(n, n+k)$ dasselbe Vorzeichen [das von $f(\xi - h)$].

Die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge

$$f(n, n+k),\ f(n+1, n+1+k), \ldots, f(N, N+k)$$

ist also mindestens $r-1$, da sie aber $\equiv r \pmod{2}$ sein muss, so ist sie mindestens gleich r, w. z. b. w.

SATZ I. — *Sei* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $(a_0 \neq 0)$, *eine im Einheitskreise konvergente Potenzreihe mit reellen Koeffizienten und*

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)} x^n \tag{4}$$

für $k \geqq k_0$ *im Punkte* $x = 1$ *im engerem Sinne divergent. Dann kann* K *so gross gewählt werden, dass für jedes* $k > K$ *die Anzahl der Zeichenwechsel* $v(k)$ *in* (4) *mit der Anzahl der Wurzeln* p *von* $f(x) = 0$ *zwischen* 0 *und* 1 *übereinstimmt. (Die Wurzeln sind mit ihrer Multiplizität zu zählen).*

Anmerkung. Die Funktionenklasse, die den Annahmen des Satzes genügt, enthält jedes Polynom mit reellen Koeffizienten, jede reelle MACLAURIN'sche Reihe, deren Konvergenzradius grösser als Eins ist und jede reelle Potenzreihe, deren Konvergenzkreis der Einheitskreis ist und die im Punkte $x = 1$ konvergent oder mit arithmetischen Mitteln summierbar ist, jedoch eine von 0 verschiedene Summe hat.

Beweis. — Um einen konkreten Fall vor uns zu haben, nehmen wir an, dass die divergente Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k_0)}$$

positiv ausfällt. Dann kann ein solches N gewählt werden, dass für $A_n^{(k)}$ $n \geqq Nk$ und $k \geqq k_0 + 1$ positiv ausfällt.

Es besteht für $k > k_0 + 1$ die Identität

$$A_n^{(k)} = A_0^{(k_0+1)}\binom{n+h}{h} + A_1^{(k_0+1)}\binom{n+h-1}{h} + \qquad + A_{n-1}^{(k_0+1)}\binom{h+1}{h} + A_n^{(k_0+1)},$$

wo statt $k - k_0 - 2$ der Kürze halber h gesetzt wurde.

Nach Voraussetzung kann man zu der positiven Zahl g ein solches ν finden dass für $n > \nu$

$$A_n^{(k_0+1)} > g$$

sei. Ist nun $N > \nu$, so besteht für

$$n > Nk \quad \text{und} \quad h = k - k_0 - 2 \geqq 0$$

die Ungleichung

$$A_n^{(k)} > g\binom{n - \nu + h}{h + 1} - \{|A_0^{(k_0+1)}| + \quad + |A_\nu^{(k_0+1)}|\}\binom{n+h}{h},$$

also

$$\frac{A_n^{(k)}}{\binom{n+h}{h}} > g\frac{n}{n+h}\cdot\frac{n-1}{n+h-1}\cdots\frac{n-\nu+1}{n-\nu+h+1}\cdot\frac{n-\nu}{h+1} - \{|A_0^{(k_0+1)}| + \cdots + |A_\nu^{(k_0+1)}|\}.$$

Es ist aber

$$\frac{n}{n+h} > \frac{n-1}{n+h-1} > \quad > \frac{n-\nu+1}{n-\nu+h+1} > \frac{n-\nu}{n-k}$$

$$> \frac{1 - \frac{\nu}{n}}{1 + \frac{1}{N}} > \frac{1 - \frac{N}{Nk}}{1 + \frac{1}{N}} = \frac{N}{N+1}\cdot\frac{k-1}{k} \geqq \frac{N}{N+1}\cdot\frac{1}{2}$$

und

$$\frac{n-\nu}{h+1} \geqq \frac{n-\nu}{k-1} > \frac{Nk-N}{k-1} = N$$

also

$$\frac{A_n^{(k)}}{\binom{n+h}{h}} > g\left[\frac{N}{N+1}\right]^\nu \cdot \frac{N}{2^\nu} - \{|A_0^{(k_0+1)}| + \cdots + |A_\nu^{(k_0+1)}|\}.$$

Ist N genügend gross gewählt, so ist die rechte Seite grösser als 0, also $A_n^{(k)}$ positiv, w. z. b. w. Ich werde die eben bewiesene Behauptung in folgender Formulierung benützen: divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)}$ für $k \geqq k_0$ zu $+\infty$, so ist bei geeigneter Wahl von N

$$(A) \qquad \begin{cases} f(n, n+k) = \dfrac{A_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} > 0 \\ \text{für } \dfrac{n}{n+k} \geqq \dfrac{N}{N+1} \quad \text{und} \quad k \geqq k_0 + 1. \end{cases}$$

Setzen wir nun

$$\frac{N}{N+1} = \tau$$

und

$$\frac{|a_0|}{|a_1|\mathfrak{z} + |a_2|\mathfrak{z}^2 + \cdots + |a_n|\mathfrak{z}^n + \cdots} = \alpha$$

(wo $\mathfrak{z}$ eine beliebig gewählte Zahl zwischen τ und 1 ist).

Ich unterscheide die beiden Fälle $\alpha \geqq 1$ und $\alpha < 1$.

Im ersten hat die Folge

(2) $\qquad f(0, k),\ f(1, 1+k), \ldots, f(n, n+k), \ldots$

sobald k ein genügend grosses K übertrifft, keine Zeichenwechsel. Ist nähmlich $\alpha \geqq 1$, so hat jedes Glied der zum Intervall $(0, \vartheta)$ gehörigen Teilfolge von (2) dasselbe Vorzeichen: das von $f(0) = a_0$; denn es ist

$$|f(n, n+k)-a_0| = \left|a_1\frac{n}{n+k}+a_2\frac{n}{n+k}\cdot\frac{n-1}{n+k-1}+\cdots\right| \leqq |a_1|\vartheta+|a_2|\vartheta^2+\cdots+|a_n|\vartheta^n < \frac{|a_0|}{\alpha}.$$

Anderseits hat $f(n, n+k)$ auch für $\frac{n}{n+k} > \tau$ ein konstantes Vorzeichen, falls $k \geqq k_0 + 1$ ist. Nun kann man K so gross wählen, das für $k > K$ mindestens ein Punkt $\frac{n}{n+k}$ in das Intervall (τ, ϑ) fällt. Ist dann k grösser als K und $k_0 + 1$, so herrscht in der ganzen Folge (2) dasselbe Vorzeichen, da die beiden Teilfolgen, deren jede für sich ein konstantes Vorzeichen bewahrt, ein gemeinsames Glied besitzen.

Wir haben damit zugleich bewiesen, dass für $k > K$ auch in der Folge

$$(5) \qquad A_0^{(k)},\quad A_1^{(k)},\ \ldots,\ A_n^{(k)},\ \ldots$$

kein Zeichenwechsel vorkommt, da ihre Glieder von den bezüglichen Gliedern der Folge (2) sich nur in positiven Faktoren unterscheiden.

Hat aber die Koeffizientenfolge (5) von

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

keine Zeichenwechsel, so hat $f(x)$ zwischen 0 und 1 keine Nullstelle, also

$$\lim_{k=\infty} v(k) = 0 = p.$$

Um unseren Satz auch für $\alpha < 1$ zu beweisen, nehme ich zuerst $p > 0$ an. Die Nullstellen von $f(x)$ zwischen 0 und 1 seien nach wachsender Grösse geordnet ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_s$, ihre Multiplizitäten resp. $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$, $(\mu_1 + \cdots + \mu_s = p)$. Es ist leicht zu zeigen, dass für $0 \leqq x \leqq \alpha\vartheta$ und $\vartheta \leqq x < 1$ $f(x)$ keine Wurzel besitzt.

Der erste Teil dieser Behauptung folgt daraus, dass für $0 < x \leqq \alpha\vartheta$

$$|a_1 x + a_2 x^2 + \cdots| < \{|a_1|\vartheta + |a_2|\vartheta^2 + \cdots\}\alpha = |a_0|$$

ist. Der zweite Teil folgt aus dem Umstande, dass

$$f(n, n+k) > 0 \quad \text{ist, wenn} \quad \frac{n}{n+k} \geqq \tau.$$

Hätte nähmlich $f(x)$ im Innern oder an der unteren Grenze des Intervalls $(\vartheta, 1)$ eine Nullstelle x_0, so müsste nach Hilfssatz III., wenn nur k genügend gross ist, beliebig nahe zu x_0 (also auch zwischen τ und 1) ein Punkt $\frac{n}{n+k}$ existieren, zu dem ein negativer Wert $f(n, n+k)$ gehörte.

In der zum Intervall $(0, \alpha\vartheta)$ gehörenden Teilfolge von (2) haben die Glieder das Vorzeichen von a_0; dies zeigt die für $\frac{n}{n+k} < \alpha\vartheta$ und $\alpha < 1$ gültige Abschätzung

$$\left|a_1\frac{n}{n+k} + a_2\frac{n}{n+k}\frac{n-1}{n+k-1} + \cdots\right| < \{|a_1|\vartheta + |a_2|\vartheta^2 + \cdots\}\alpha < |a_0|.$$

Sei nun die positive Zahl δ so bestimmt, dass

$$\alpha\vartheta < \xi_1 - \delta, \quad \xi_1 + \delta < \xi_2 - \delta, \; \ldots, \; \xi_{s-1} + \delta < \xi_s - \delta, \quad \xi_s + \delta < \vartheta$$

sei und

$$f^{(\mu_i)}(x) \quad \text{für} \quad \xi_i - \delta \leqq x \leqq \xi_i + \delta \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, s)$$

nicht verschwinde.

Man kann K so gross wählen, dass für $k > K$:

1° die Teilfolgen von (2), welche zu den Intervallen

$$\left(\alpha\vartheta, \xi_1 - \frac{\delta}{2}\right), \left(\xi_1 + \frac{\delta}{2}, \xi_2 - \frac{\delta}{2}\right), \ldots, \left(\xi_{s-1} + \frac{\delta}{2}, \xi_s - \frac{\delta}{2}\right), \left(\xi_s + \frac{\delta}{2}, \vartheta\right), (\tau, 1)$$

gehören, jede für sich, ein konstantes Vorzeichen bewahren; (Hilfssatz I. und A)

2° die Teilfolgen von (2), welche zu den Intervallen

$$(\xi_1 - \delta, \xi_1 + \delta), \quad (\xi_2 - \delta, \xi_2 + \delta), \qquad (\xi_s - \delta, \xi_s + \delta)$$

gehören, resp. $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ Zeichenwechsel aufweisen; (Hilfssatz III.)

3° in jedes einzelne der Intervalle

$$\left(\xi_1 - \delta, \xi_1 - \frac{\delta}{2}\right), \left(\xi_1 + \frac{\delta}{2}, \xi_1 + \delta\right), \ldots, \left(\xi_s - \delta, \xi_s - \frac{\delta}{2}\right), \left(\xi_s + \frac{\delta}{2}, \xi_s + \delta\right), (\tau, \vartheta)$$

mindestens ein Punkt $\frac{n}{n+k}$ falle.

Bei dieser Wahl von K treten in der Folge (2) genau

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_s = p$$

Zeichenwechsel auf, sobald $k > K$ ist. Nach den Vorhergehenden können wir nähmlich die Zeichenwechsel in der Folge (2) folgenderweise abzählen:

In der zu $\left(0, \xi_1 - \frac{\delta}{2}\right)$ gehörenden Teilfolge haben alle Glieder das Vorzeichen von $f(0)$; in der Teilfolge, welche zu $(\xi_1 - \delta, \xi_1 + \delta)$ gehört, treten μ_1 Zeichenwechsel auf; diese beide Teilfolgen haben mindestens ein Glied gemeinsam, also kommen in der zu $(0, \xi_1 + \delta)$ gehörenden Teilfolge genau μ_1 Zeichenwechsel vor. Das letzte Glied dieser Teilfolge fällt aber schon in jene, die zum Intervall $\left(\xi_1 + \frac{\delta}{2}, \xi_2 - \frac{\delta}{2}\right)$ gehört und in welcher keine Zeichenwechsel vorkommen; daher bleibt μ_1 die Anzahl der Zeichenwechsel in der ganzen Teilfolge, die zum Intervall $\left(0, \xi_2 - \frac{\delta}{2}\right)$ zugeordnet ist. In genau derselben Weise können wir die nach einander folgenden und in einander greifenden Teilintervalle

$$\left(0, \xi_1 - \frac{\delta}{2}\right), \quad (\xi_1 - \delta, \xi_1 + \delta), \quad \left(\xi_1 + \frac{\delta}{2}, \xi_2 - \frac{\delta}{2}\right),$$

$$(\xi_2 - \delta, \xi_2 + \delta), \qquad (\xi_s - \delta, \xi_s + \delta), \quad \left(\xi_s + \frac{\delta}{2}, \vartheta\right), \quad (\tau, 1)$$

[die insgesammt das ganze Intervall (0, 1) überdecken], behandeln und sehen, dass dabei die Anzahl der Zeichenwechsel in der ganzen Folge (2) [die aus den konsekutiven Teilfolgen ähnlicherweise zusammengesetzt ist, wie das Intervall (0, 1) aus den bezüglichen Teilintervallen] genau auf

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_s = p$$

wächst.

Um auch den Fall $p = 0$ zu erledigen, genügt es das Intervall (0, 1) folgendermassen zu teilen:

$$(0, \alpha\vartheta), \quad (\alpha\vartheta, \vartheta), \quad (\vartheta, 1);$$

in den Teilfolgen, die zu diesen Intervallen gehören, treten für genügend grosse k keine Zeichenwechsel auf. Dieselbe Schlussweise, wie oben, zeigt dann, dass die Anzahl der Zeichenwechsel in der ganzen Folge (2) gleich Null ist.

Damit ist die Gleichung

$$\lim_{k=\infty} v(k) = p$$

für alle Fälle bewiesen.

Satz II. — *Sei* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten, die im Einheitskreise konvergiert. Sei* $v(k)$ *die Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge der Potenzreihe*

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)} x^n$$

und nehmen wir an, dass

$$\lim_{k=\infty} v(k) > 0$$

ist [3]. *Sei K so gross gewählt, dass für* $k > K$ *der Wert von* $v(k)$ *ungeändert bleibt. Sind*

$$\nu_1^{(k)}, \quad \nu_2^{(k)}, \ldots, \nu_i^{(k)}, \ldots$$

die Indices der Glieder in der Folge

$$A_0^{(k)}, \quad A_1^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)} \ldots, \qquad (k > K)$$

nach denen ein Zeichenwechsel auftritt, so existieren die Grenzwerte

$$(6) \qquad \lim_{k=\infty} \frac{\nu_1^{(k)}}{\nu_1^{(k)} + k}, \quad \lim_{k=\infty} \frac{\nu_2^{(k)}}{\nu_2^{(k)} + k}, \ldots, \lim_{k=\infty} \frac{\nu_i^{(k)}}{\nu_i^{(k)} + k}, \ldots.$$

Die Folge (6) *besitzt folgende Eigenschaften:*

1° *sie ist nie abnehmend und jedes ihrer Glieder ist* $\leqq 1$;

2° *ihre Glieder, die kleiner als Eins sind, sind Wurzeln von* $f(x) = 0$;

3° *jede Wurzel von* $f(x) = 0$ *kommt in ihr vor und zwar jede so oft, als ihre Multiplizität beträgt.*

Beweis: I. Hat $f(x) = 0$ im Intervall (0, 1) keine Wurzel, dann kann — wie nahe auch der echte Bruch ϑ zu Eins gewählt sein mag — $K = K(\vartheta)$ so bestimmt werden, dass für $k > K$ die zum Intervalle (0, 1) gehörende Teilfolge von (2) kein

[3]) Nach Laguerre's Ergebnissen existiert $\lim_{k=\infty} v(k)$ immer, ist gleich einer nicht negativen ganzen Zahl oder $+\infty$ und ist nie kleiner als die Anzahl der Wurzeln von $f(x)$ zwischen 0 und 1.

Zeichenwechsel aufweist. Gibt es also in der Folge (2), für noch so grosse k, Glieder, bei welchen ein Zeichenwechsel vorkommt, so müssen die Quotienten ihrer Argumente $\frac{n}{n+k}$ in das Intervall (ϑ, 1) fallen, also für $k=\infty$ zu 1 konvergieren.

II. Nehmen wir nun an, das $f(x)=0$ zwischen 0 und 1 eine endliche Anzahl von Wurzeln besitze. Seien diese Wurzeln in wachsender Ordnung $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ ihre Multiplizitäten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$, $(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s=p)$. Ist $\xi_s<\vartheta<1$, so kann $K=K(\vartheta, \delta)$ so gewählt werden, dass für $k>K$ in der zu $(0, \vartheta)$ gehörenden Teilfolge von (2) genau p Zeichenwechsel vorkommen und dass, wenn diese Zeichenwechsel nach dem $\nu_1^{(k)}, \nu_2^{(k)}, \ldots, \nu_p^{(k)}$-ten Gliede auftreten, die Ungleichungen

$$\left|\xi_1-\frac{\nu_i^{(k)}}{\nu_i^{(k)}+k}\right|<\delta \quad \text{für} \quad i=1, 2, \ldots, \mu_1$$

$$\left|\xi_2-\frac{\nu_i^{(k)}}{\nu_i^{(k)}+k}\right|<\delta \quad \text{für} \quad i=\mu_1+1, \mu_1+2, \ldots, \mu_1+\mu_2$$

. . . .

$$\left|\xi_s-\frac{\nu_i^{(k)}}{\nu_i^{(k)}+k}\right|<\delta \quad \text{für} \quad i=p-\mu_s+1, p-\mu_s+2, \ldots, p$$

bestehen, wie klein auch die positive Zahl δ gewählt sein mag. Damit ist bewiesen, dass die p ersten Glieder der Folge (6) die Wurzeln von $f(x)=0$ zwischen 0 und 1 ergeben. Enthält die Folge (6) noch weitere Glieder, so müssen sie in das Intervall (ϑ, 1) fallen und — da ϑ beliebig nahe zu Eins gewählt werden kann — notwendigerweise mit Eins übereinstimmen.

III. Hat $f(x)=0$ im Intervall (0, 1) Wurzeln in unendlicher Anzahl, so hat die Menge der Wurzeln den einzigen Grenzpunkt 1. Sei $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_i, \ldots$ eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen, die zu Eins konvergieren und für welche $f(\vartheta_i)\neq 0$. Ist p_i die (notwendigerweise endliche) Anzahl der Wurzeln von $f(x)=0$ im Intervall $(0, \vartheta_i)$, so kann, ähnlich wie im vorigen Falle, gefolgert werden, dass die ersten p_i Glieder der Folge (6) mit diesen Wurzeln zusammenfallen und die folgenden Glieder derselben Folge zwischen ϑ_i und 1 fallen. Damit ist aber der Satz II. auch für den Fall unendlich vieler Wurzeln bewiesen, da ja zu jeder Wurzel zwischen 0 und 1 ein ϑ_i gefunden werden kann, das sie übertrifft.

. . . .

Ist $f(x)$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten, so zeigten Sie, wie man mit Hilfe der Zeichenwechsel in der MACLAURIN'schen Entwicklung von $\frac{f(x)}{(1-x)^{k+1}}$ die Wurzeln von $f(x)=0$ zwischen 0 und 1 ermitteln kann. Ich möchte Ihnen noch mitteilen, dass man zur Bestimmung der Wurzeln auch die Zeichenwechsel in den MACLAURIN'schen Entwicklungen von $f(x)e^{kx}$ und $f(x)(1+x)^k$ $(k=1, 2, \ldots)$ benützen kann. Mit ähnlichen Methoden, wie die Ihrigen, gelang es nähmlich mir für

$f(x)e^{kx}$ und Herrn ELEMÉR BÁLINT für $f(x)(1+x)^k$ zu beweisen, dass die Grenzwerte

$$\lim_{k=\infty} \frac{\mu_i^{(k)}}{k} \quad \text{resp.} \quad \lim \frac{\nu_i^{(k)}}{k - \nu_i^{(k)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

alle positiven Wurzeln von $f(x) = 0$ im Konvergenzkreise mit richtiger Multiplizität ergeben, wenn $\mu_i^{(k)}$ in der Entwicklung von $f(x)e^{kx}$ und $\nu_i^{(k)}$ in der Entwicklung von $f(x)(1+x)^k$ den Index jenes Gliedes bezeichnet, bei welchem der i-te Zeichenwechsel vorkommt.

Sowohl in den Reihen $f(x)e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} x^n$, als in den Reihen $f(x)(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} x^n$ kann die Anzahl der Zeichenwechsel mit wachsendem k nur abnehmen, muss also für $k = \infty$ einen Grenzwert haben. Wir bewiesen für eine ziemlich allgemeine Klasse von Funktionen $f(x)$, dass dieser Grenzwert mit der Anzahl der positiven Wurzeln von $f(x) = 0$ im Konvergenzkreise genau übereinstimmt.

Ist $f(x)$ ein Polynom, so haben die Entwicklungen von $f(x)(1+x)^k$ denen von $\dfrac{f(x)}{(1-x)^k}$ und $f(x)e^{kx}$ gegenüber den Vorteil, dass sie für jedes k eine endliche Anzahl von Gliedern enthalten.

. . . .

Ich stellte das Problem der Bestimmung der reellen Wurzeln auch für Funktionen, die durch DIRICHLET'schen Reihen mit reellen Koeffizienten definiert sind. Es ergab sich hierfür ein ähnliches Verfahren, wie für Potenzreihen, nur traten an die Stelle der arithmetischen Mittel die von H. MARCEL RIESZ definierten « typischen Mittel » [4]).

. . . .

Budapest, den 20. Februar 1912.

MICHAEL FEKETE.

[4]) M. RIESZ: *a) Sur la sommation des séries de* DIRICHLET [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. CXLIX (2. Semester 1909), pp. 18-21; *b) Sur les séries de* DIRICHLET *et les séries entières* [Ibid., id., pp. 909-912].